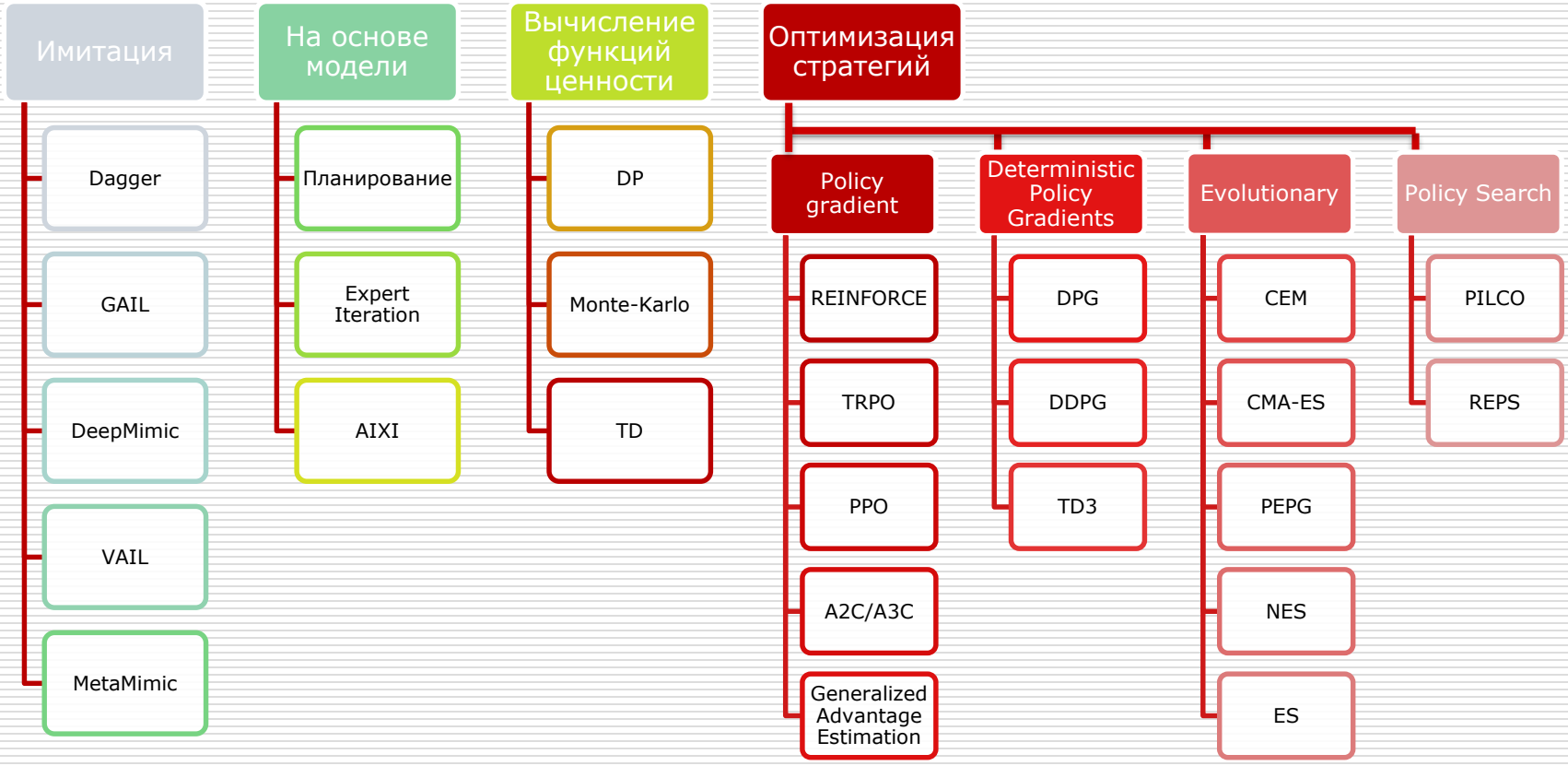
Методы решения задач обучения с подкреплением



Методы решения задач обучения с подкреплением на основе функций ценности

- Динамическое программирование
  - Хорошо проработаны теоретически
  - Требуют модели среды
- Метод Монте-Карло
  - Не требуют модели среды
  - Учатся только по окончанию эпизода
- Метод временных разностей
  - Не требуют модели
  - Учатся в процессе работы
  - Сложнее для теоретического анализа

Методы решения задач обучения с подкреплением

Динамическое программирование

Исходные предпосылки

- Известно:

  Имеется конечный марковский процесс принятия решений: множества состояний S и доступных действий $A(s)$ – конечны.

  Переходные вероятности:

$$\mathcal{P}^a_{ss'} = Pr\left\{s_{t+1}=s' \mid s_t=s, a_t=a\right\}$$

  Ожидаемые подкрепления:

$$\mathcal{R}^a_{ss'} = E\left\{r_{t+1} \mid a_t=a, s_t=s, s_{t+1}=s'\right\}$$

Идея

- Мы хотим найти оптимальную стратегию

  Это просто сделать если у нас есть оптимальная функция ценности.

- Ищем V* или Q* удовлетворяющие условиям оптимальности Беллмана

$$V^*(s) = \max_a \sum_{s'} \mathcal{P}^a_{ss'} \left[\mathcal{R}^a_{ss'} + \gamma V^*(s') \right]$$

$$Q^*(s,a) = \sum_{s'} \mathcal{P}^a_{ss'} \left[\mathcal{R}^a_{ss'} + \gamma \max_{a'} Q^*(s',a') \right]$$

Оценка стратегии

- Мы хотим получить функцию ценности $V^{\pi}(s)$ для некоторой стратегии π.
- Уравнения Беллмана дают нам систему из $|S|$ уравнений с $|S|$ неизвестными

$$
\begin{aligned}
V^{\pi}(s) &= E_{\pi}\left\{ r_{t+1} + \gamma r_{t+2} + \gamma^2 r_{t+3} + \cdots \,|\, s_t = s \right\} \\
&= E_{\pi}\left\{ r_{t+1} + \gamma V^{\pi}(s_{t+1}) \,|\, s_t = s \right\} \\
&= \sum_{a} \pi(s,a) \sum_{s'} \mathcal{P}^{a}_{ss'} \left[\mathcal{R}^{a}_{ss'} + \gamma V^{\pi}(s') \right]
\end{aligned}
$$

Оценка стратегии

Рассмотрим последовательность функций $V_0, V_1, V_2, \ldots$, аппроксимирующих искомую функцию ценности $V^{\pi}(s)$.

- Начальное приближение V_0 – произвольное.
- Последующие получаются применением правила

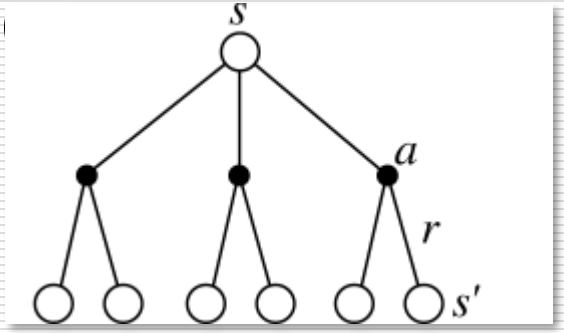
$$V_{k+1}(s) = E_{\pi}\{r_{t+1} + \gamma V_k(s_{t+1}) | s_t = s\}$$
$$= \sum_a \pi(s,a) \sum_{s'} \mathcal{P}^a_{ss'} \left[\mathcal{R}^a_{ss'} + \gamma V_k(s')\right]$$

Оценка стратегии

Рассмотрим последовательность функций $V_0, V_1, V_2, \ldots$, аппроксимирующих искомую функцию ценности $V^\pi(s)$.

$$V_{k+1}(s) = E_\pi\{r_{t+1} + \gamma V_k(s_{t+1}) | s_t = s\}$$
$$= \sum_a \pi(s,a) \sum_{s'} \mathcal{P}^a_{ss'} \left[\mathcal{R}^a_{ss'} + \gamma V_k(s')\right]$$

- $V_k = V^\pi(s)$ – неподвижная точка.
- $\{V_k\} \to V^\pi(s)$ при $k \to \infty$



Алгоритм оценки стратегии методом ДП

- Непосредственная реализация:
  - Делаем два массива: для «старых» и «новых» значений V.
- Что будет, если мы будем замешать значения сразу в одном массиве?
  - Алгоритм также будет сходиться к V^{π}
  - Обычно он будет сходиться быстрее
  - Порядок прохода по пространству состояний будет оказывать существенное влияние на скорость сходимости

Алгоритм оценки стратегии методом ДП

- Критерий останова:
  - В теории сходимся в пределе при бесконечном числе шагов.
  - На практике обычно останавливаются немного раньше.
  - Например, оценивают изменение функции ценности после каждого прохода:

$$\max_{s \in S} |V_{k+1}(s) - V_k(s)|$$

Алгоритм оценки стратегии методом ДП

Вход: π – оцениваемая стратегия

Инициализация: $V(s)=0$ для всех $s \in S$.

Повторять

$\Delta \leftarrow 0$

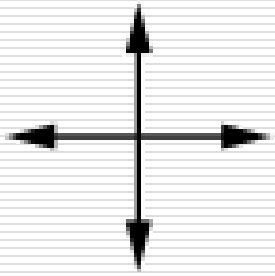
Для всех $s \in S$:

$$v \leftarrow V(s)$$
$$V(s) \leftarrow \sum_a \pi(s,a) \sum_{s'} \mathcal{P}^a_{ss'} \left[\mathcal{R}^a_{ss'} + \gamma V(s') \right]$$
$$\Delta \leftarrow \max(\Delta, |v - V(s)|)$$

пока $\Delta > \Theta$

Оценка стратегии методом ДП. Пример.

$S = \{1, 2, \ldots, 14\}$



actions

	1	2	3
4	5	6	7
8	9	10	11
12	13	14	

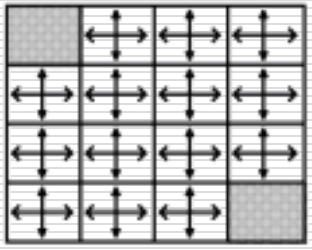
Подкрепление *r*=-1 пока не попадём в терминальное состояние.

$$\mathcal{P}^{\text{right}}_{5,6} = 1 \quad \mathcal{P}^{\text{right}}_{5,10} = 0 \quad \mathcal{P}^{\text{right}}_{7,7} = 1 \qquad \mathcal{R}^{a}_{ss'} = -1$$

Оценка стратегии методом ДП. Пример.

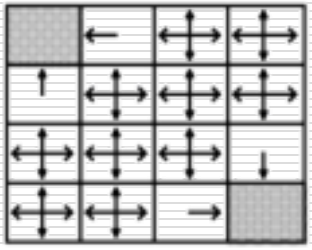
$k = 0$

0.0	0.0	0.0	0.0
0.0	0.0	0.0	0.0
0.0	0.0	0.0	0.0
0.0	0.0	0.0	0.0



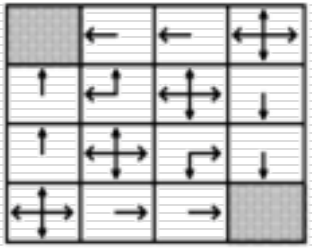
$k = 1$

0.0	-1.0	-1.0	-1.0
-1.0	-1.0	-1.0	-1.0
-1.0	-1.0	-1.0	-1.0
-1.0	-1.0	-1.0	0.0



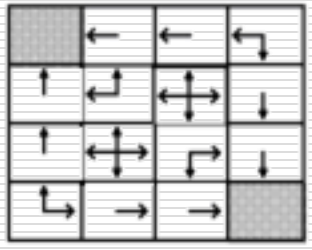
$k = 2$

0.0	-1.7	-2.0	-2.0
-1.7	-2.0	-2.0	-2.0
-2.0	-2.0	-2.0	-1.7
-2.0	-2.0	-1.7	0.0



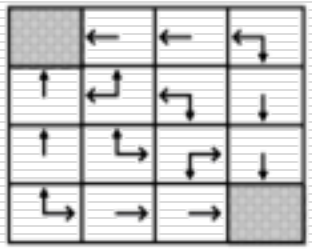
$k = 3$

0.0	-2.4	-2.9	-3.0
-2.4	-2.9	-3.0	-2.9
-2.9	-3.0	-2.9	-2.4
-3.0	-2.9	-2.4	0.0



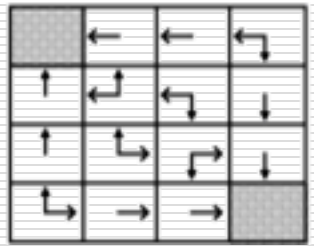
$k = 10$

0.0	-6.1	-8.4	-9.0
-6.1	-7.7	-8.4	-8.4
-8.4	-8.4	-7.7	-6.1
-9.0	-8.4	-6.1	0.0



$k = \infty$

0.0	-14.	-20.	-22.
-14.	-18.	-20.	-20.
-20.	-20.	-18.	-14.
-22.	-20.	-14.	0.0



Улучшение стратегий

Что лучше, в состоянии s действовать по стратегии π или предпринять действие $a \neq \pi(s)$?

- Действуем по стратегии π :
  $V^{\pi}(s)$
- Делаем a:

$$Q^{\pi}(s,a) = E_{\pi}\{r_{t+1} + \gamma V^{\pi}(s_{t+1}) | s_t = s, a_t = a\}$$
$$= \sum_{s'} \mathcal{P}^{a}_{ss'} \left[\mathcal{R}^{a}_{ss'} + \gamma V^{\pi}(s') \right].$$

Теорема об улучшении стратегий

Пусть имеются две стратегии π и π', такие, что для всех $s \in S$:

$$Q^{\pi}(s, \pi'(s)) \geq V^{\pi}(s). \qquad (1)$$

Тогда стратегия π' лучше или равна стратегии π, то есть она должна обеспечивать лучший возврат для всех состояний:

$$V^{\pi'}(s) \geq V^{\pi}(s). \qquad (2)$$

Более того, если в одном из условий (1) имеется строгое неравенство, то и в одном из (2) должно быть строгое неравенство.

Теорема об улучшении стратегий

$$
\begin{aligned}
V^{\pi}(s) &\leq Q^{\pi}(s, \pi'(s)) \\
&= E_{\pi'}\{r_{t+1} + \gamma V^{\pi}(s_{t+1}) \mid s_t = s\} \\
&\leq E_{\pi'}\{r_{t+1} + \gamma Q^{\pi}(s_{t+1}, \pi'(s_{t+1})) \mid s_t = s\} \\
&= E_{\pi'}\{r_{t+1} + \gamma E_{\pi'}\{r_{t+2} + \gamma V^{\pi}(s_{t+2})\} \mid s_t = s\} \\
&= E_{\pi'}\{r_{t+1} + \gamma r_{t+2} + \gamma^2 V^{\pi}(s_{t+2}) \mid s_t = s\} \\
&\leq E_{\pi'}\{r_{t+1} + \gamma r_{t+2} + \gamma^2 r_{t+3} + \gamma^3 V^{\pi}(s_{t+3}) \mid s_t = s\} \\
&\vdots \\
&\leq E_{\pi'}\{r_{t+1} + \gamma r_{t+2} + \gamma^2 r_{t+3} + \gamma^3 r_{t+4} + \cdots \mid s_t = s\} \\
&= V^{\pi'}(s).
\end{aligned}
$$

Улучшение стратегий

- Рассмотрим жадную стратегию

$$\begin{aligned}\pi'(s) &= \arg\max_a Q^\pi(s,a) \\ &= \arg\max_a E\left\{r_{t+1} + \gamma V^\pi(s_{t+1}) \mid s_t = s, a_t = a\right\} \\ &= \arg\max_a \sum_{s'} \mathcal{P}^a_{ss'}\left[\mathcal{R}^a_{ss'} + \gamma V^\pi(s')\right],\end{aligned}$$

- По определению удовлетворяет условиям теоремы об улучшении стратегий.
- Процесс построения жадной стратегии по функции ценности состояний исходной стратегии называется улучшением стратегий.

Улучшение стратегий

Пусть новая жадная стратегия π' получилась такой же, как и предыдущая π. Тогда

- $V^{\pi'}=V^{\pi}$
- Для всех $s\in S$

$$
\begin{aligned}
V^{\pi'}(s) &= \max_a E\left\{r_{t+1}+\gamma V^{\pi'}(s_{t+1}) \mid s_t=s, a_t=a\right\} \\
&= \max_a \sum_{s'} \mathcal{P}^a_{ss'}\left[\mathcal{R}^a_{ss'}+\gamma V^{\pi'}(s')\right].
\end{aligned}
$$

- условие оптимальности Беллмана

Случай стохастических стратегий

- Стохастическая стратегия определяет вероятность $\pi(s,a)$ выполнить действие a находясь в состоянии s.
- Теорема об улучшении стратегий работает, если мы обозначим

$$Q^{\pi}(s,\pi'(s)) = \sum_{a} \pi'(s,a) Q^{\pi}(s,a).$$

- Если у нас есть несколько оптимальных действий можем назначить им равные вероятности

Итерация стратегий

После того, как мы улучшили текущую стратегию использовав её функцию ценности, мы можем вычислить функцию ценности новой стратегии и улучшить её…

В результате дойдём до оптимальной функции ценности и оптимальной стратегии.

$$\pi_0 \xrightarrow{O} V^{\pi_0} \xrightarrow{Y} \pi_1 \xrightarrow{O} V^{\pi_1} \xrightarrow{Y} \pi_2 \xrightarrow{O} \cdots \xrightarrow{Y} \pi^* \xrightarrow{O} V^*$$

Итерация стратегий методом ДП. Алгоритм.

1. Инициализация:

$V(s)$ и $\pi(s)$ - произвольно для всех $s \in S$.

2. Оценка стратегии:

Повторять

$\Delta \leftarrow 0$

Для всех $s \in S$:

$$v \leftarrow V(s)$$
$$V(s) \leftarrow \sum_{s'} \mathcal{P}_{ss'}^{\pi(s)} \left[\mathcal{R}_{ss'}^{\pi(s)} + \gamma V(s') \right]$$
$$\Delta \leftarrow \max(\Delta, |v - V(s)|)$$

пока $\Delta > \Theta$

3. Улучшение стратегии:

policy-stable$\leftarrow$*true*

Для всех $s \in S$:

$$b \leftarrow \pi(s)$$
$$\pi(s) \leftarrow \arg\max_a \sum_{s'} \mathcal{P}_{ss'}^{a} \left[\mathcal{R}_{ss'}^{a} + \gamma V(s') \right]$$

Если $b \neq \pi(s)$ то

policy-stable$\leftarrow$*false*

Если *policy-stable* то

Стоп

иначе

Перейти к 2.

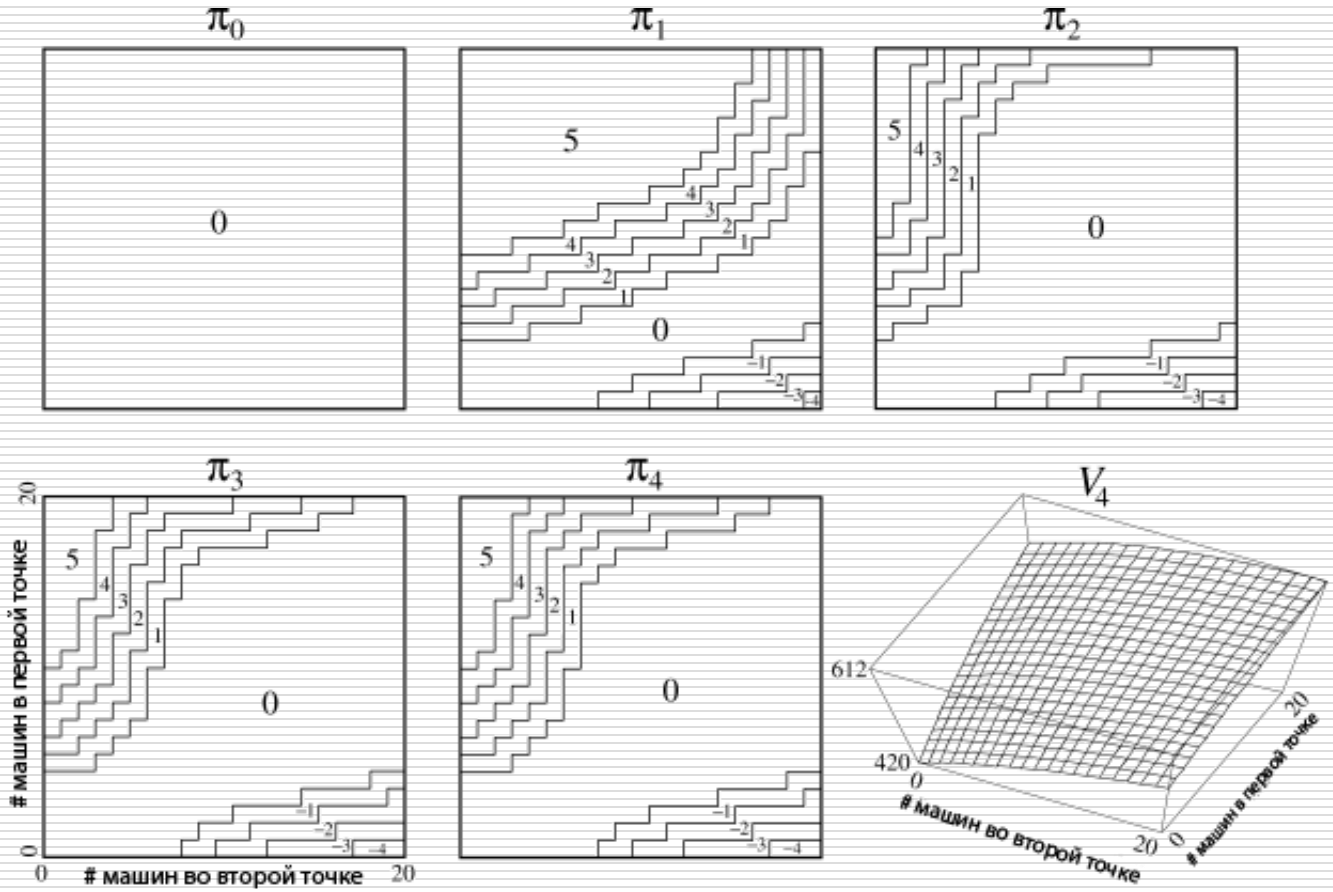
Пример: аренда машин

- Вы управляете двумя точками аренды машин в национальной сети
- Каждый день в обе точки приходят клиенты, и если имеются доступные машины то машина сдаётся в аренду и вы получаете 10$ от сети
- Число клиентов, приходящих в каждую точку подчиняется распределению Пуассона, т.е. вероятность того, что придёт n человек равна $\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}$, где λ – параметр:
  - Для запросов на аренду в точке 1 $\lambda = 3,$ возвратов $\lambda = 3$.
  - В точке 2 запросы поступают с $\lambda = 4$, возвраты с $\lambda = 2$.
- В каждой точке находятся не более 20 машин, лишние возвращаются в компанию
- Возвращенная машина становится доступной на следующий день
- Ночью можно переместить не более 5 машин из одной точки в другую, затратив на каждую машину 2$

Пример: аренда машин

- Длящийся конечный Марковский процесс принятия решений
- Шаг – 1 день
- Состояние – число машин в каждой точке вечером
- Действие – сколько машин перегнать
- Возьмём коэффициент дисконта $\gamma = 0.9$

Пример: аренда машин



Итерация ценностей

- Наш алгоритм для каждого шага улучшения стратегии требует вычисления функции ценности, что долго.
- Рассмотренный пример показывает, что можно начинать улучшать стратегию не дожидаясь конца вычислений функции ценности.
- Будем делать стратегию жадной после каждой итерации вычисления функции ценности.

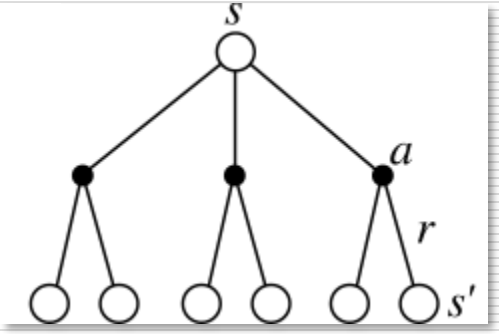
$$V_{k+1}(s) = \max_a E\left\{r_{t+1} + \gamma V_k(s_{t+1}) \mid s_t = s, a_t = a\right\}$$
$$= \max_a \sum_{s'} \mathcal{P}^a_{ss'}\left[\mathcal{R}^a_{ss'} + \gamma V_k(s')\right],$$

- $\{V_k\} \to V^*(s)$ при $k \to \infty$

Итерация стратегий и итерация ценностей

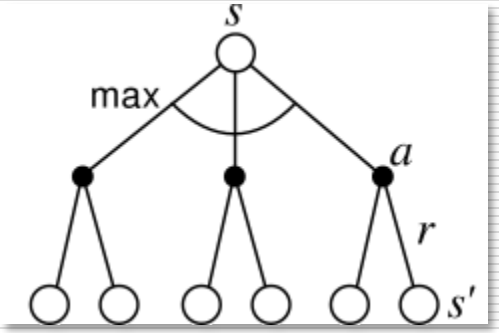
- Итерация стратегий

$$V_{k+1}(s) = E_\pi\{r_{t+1} + \gamma V_k(s_{t+1}) | s_t = s\}$$
$$= \sum_a \pi(s,a) \sum_{s'} \mathcal{P}^a_{ss'} \left[\mathcal{R}^a_{ss'} + \gamma V_k(s')\right]$$



- Итерация ценностей

$$V_{k+1}(s) = \max_a E\{r_{t+1} + \gamma V_k(s_{t+1}) \mid s_t = s, a_t = a\}$$
$$= \max_a \sum_{s'} \mathcal{P}^a_{ss'} \left[\mathcal{R}^a_{ss'} + \gamma V_k(s')\right],$$



Алгоритм итерации ценностей методом ДП

- Критерий останова:
  - Оцениваем изменение функции ценности после каждого прохода:

$$\max_{s \in S} |V_{k+1}(s) - V_k(s)|$$

Алгоритм итерации ценностей методом ДП

Инициализация:

$V(s)$ и $\pi(s)$ - произвольно для всех $s \in S^+$.

Повторять

$\Delta \leftarrow 0$

Для всех $s \in S$:

$$v \leftarrow V(s)$$
$$V(s) \leftarrow \max_a \sum_{s'} \mathcal{P}^a_{ss'} \left[\mathcal{R}^a_{ss'} + \gamma V(s') \right]$$
$$\Delta \leftarrow \max(\Delta, |v - V(s)|)$$

пока $\Delta > \Theta$

Выдать стратегию $\pi(s)$:

$$\pi(s) = \arg\max_a \sum_{s'} \mathcal{P}^a_{ss'} \left[\mathcal{R}^a_{ss'} + \gamma V(s') \right]$$

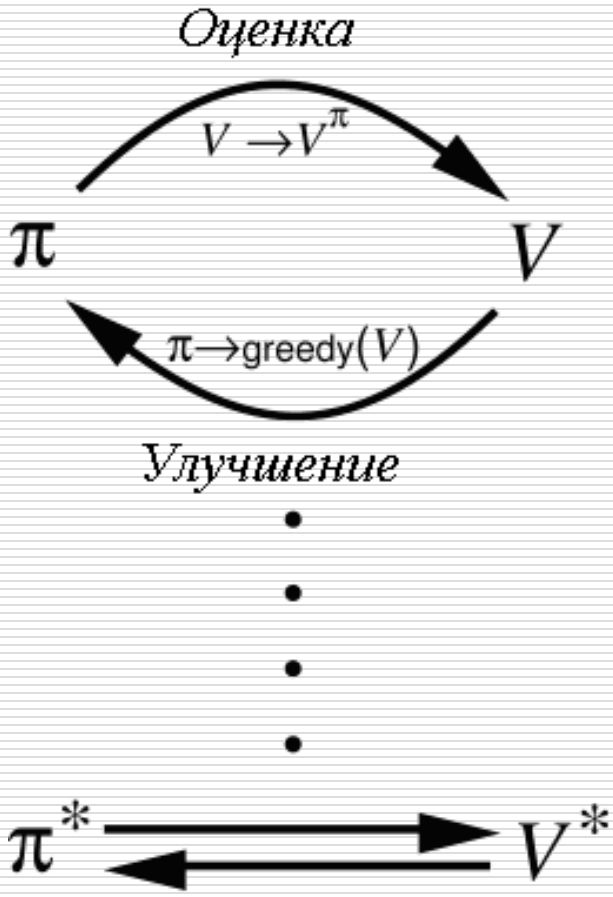
Асинхронное динамическое программирование

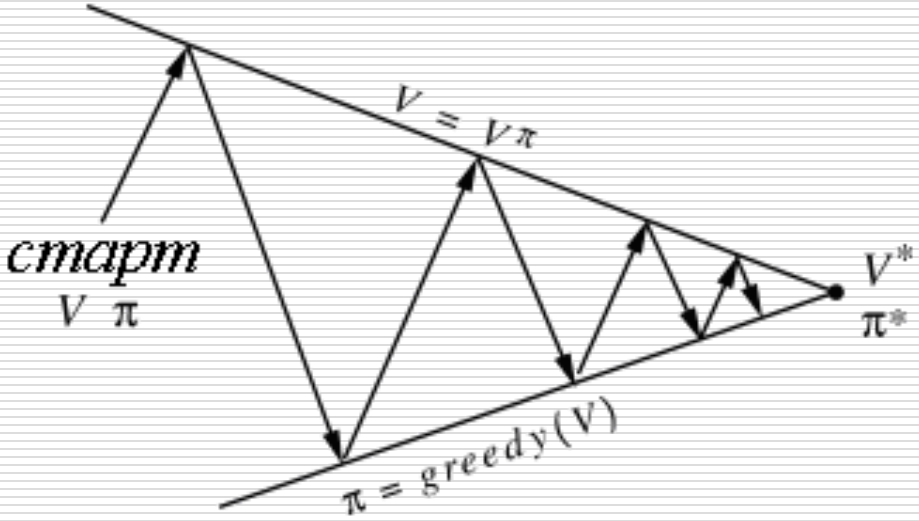
Нам всё ещё необходимо делать проход по всему пространству состояний. Если состояний много, то это может быть неприемлемо.

- Можно обновлять ценности только некоторых состояний – асинхронное ДП.
- Сходимость как правило гарантирована если мы будем обновлять их все.

- Можно чаще обновлять ценности тех состояний, которые важны для оптимального поведения.
- Можно обновлять ценности состояний, в которые агент попадает во время работы.

Обобщенная итерация стратегий





Вычислительная сложность динамического программирования

- Пусть n – число состояний, m – число действий.
- Методы ДП находят решение за полиномиальное от m и n время, хотя общее число стратегий равно m^n.
- Позволяют решать задачи с числом состояний примерно в 100 раз большим, чем можно решать методом линейного программирования.
- Для очень больших задач целесообразно применять асинхронное ДП.

Выводы

- Оценка стратегии π – вычисление её функции ценности V^{π}
- Улучшение стратегии – вычисление лучшей стратегии, используя функцию ценности
- Итерация стратегий – последовательное применение оценки стратегии и её улучшения
- Итерация ценностей – оценка, при которой стратегия сразу же считается жадной относительно текущего приближения функции ценности

Выводы

- Классические методы ДП проходят по всему пространству состояний, выполняя **полное обновление** для всех состояний
- Полное обновление означает что мы рассматриваем все возможные переходы
- Полные обновления тесно связаны с уравнениями Беллмана
- Так как у нас есть 4 базовых функции $V^{\pi}, V^{*}, Q^{\pi}, Q^{*}$ и 4 соответствующих вида уравнений Беллмана, то мы можем использовать 4 вида полных обновлений

Выводы

- Обобщенная итерация стратегий
  - Алгоритм представляет из себя два процесса:
    - Один движется в сторону оценки стратегии
    - Второй улучшает стратегию
  - Оба процесса, хотя и меняют основу друг для друга, приводят нас к общему решению: стратегии и функции ценности, которые не меняются этими процессами и являются оптимальными
  - В некоторых случаях можно доказать сходимость обобщенной итерации стратегий
  - Одним из примеров являются асинхронные методы ДП, которые обновляют состояния в произвольном порядке

Выводы

- Методы ДП обновляют оценку ценности состояний на основе неточных оценок ценности других состояний

  - будем называть такие методы **рекурсивными**

- Методы ДП требуют наличия модели среды в форме переходных вероятностей и ожидаемых подкреплений.

Задача 2

- Игрок делает ставки (целое число) на результат бросания монетки:
  - Если выпал орёл игрок получает столько денег, сколько он поставил
  - Если решка – теряет деньги
  - Вероятность выпадения орла известна и равна p.
- Конец игры:
  - Игрок получает 100$ и выигрывает
  - У игрока кончаются деньги и он проигрывает

Задача 2

- Имеем эпизодическую, конечную Марковскую задачу без дисконта
- Состояние – сколько есть денег $s \in \{1,2,\dots,99\}$.
- Действие – сколько денег ставим $\mathrm{a}(s) \in \{1,2,\dots,\min(s,100-s)\}$.
- Подкрепление – 0, пока игрок не достигнет своей цели; когда достигнет +1
- Функция ценности состояния – вероятность выиграть имея столько денег.
- Оптимальная стратегия – оптимальный размер ставки в зависимости от капитала.
- Вычислите оптимальную функцию ценности и стратегию для этой задачи, используя ДП, для $p = 0.25$ и $p = 0.55$. Подумайте, почему они такие.